

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений



Каменский М.И.

*подпись, расшифровка подписи*

25.05.2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
Б1.В.06 Системы с диодными нелинейностями

- 1. Код и наименование направления подготовки** 02.04.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки** Математическое и компьютерное моделирование
- 3. Квалификация выпускника:** магистр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составитель программы:** Петрова Любовь Петровна, кандидат физико-математических наук
- 7. Рекомендована:** научно-методическим советом математического факультета  
Протокол № 0500-06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2023/2024 **Семестр:** 2

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является ознакомление студентов с системами с диодными нелинейностями и задачами, приводящими к этим системам. Задачами курса являются:

- 1) изучение некоторых вопросов теории выпуклых множеств, конусов и гранёных конусов;
- 2) знакомство с оператором диодной нелинейности и его свойствами;
- 3) изучение вопросов существования и единственности решения задачи Коши для систем с диодными нелинейностями (СДН);
- 4) изучение вопросов о периодических решениях СДН и их устойчивости.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к формируемой участниками образовательных отношений (вариативной) части блока Б1.

### Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Системы с диодными нелинейностями»

«Дифференциальные уравнения», «Модели систем с разрывными нелинейностями»:  
– дифференциальные уравнения (решения задачи Коши, устойчивость решения);  
– модели систем с разрывными нелинейностями (определение решений задачи Коши с разрывной правой частью и дифференциального включения);

**Дисциплина «Системы с диодными нелинейностями»** является специальным курсом, расширяющим понятие систем дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

### 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен проводить научно-исследовательские разработки в области математического моделирования физических и экономических процессов методами функционального анализа, а также реализовывать программно соответствующие математические алгоритмы	ПК-1.2	Умеет использовать соответствующие базовые знания при проведении научно-исследовательских работ	<b>Знать:</b> принцип построения модели в виде системы с диодной нелинейностью (СДН); <b>Уметь</b> определять, допускает ли та или иная задача модель в виде СДН; создавать программы, реализующие СДН в среде прикладных программных средств;  <b>Владеть:</b> навыками исследования моделей с помощью математического аппарата и компьютерных технологий
ПК-3	Способен выбирать методы и описывать процесс исследования, формулировать выводы и оформлять результаты научно-исследовательских работ	ПК-3.1	Знает принципы и этапы построения научно-исследовательской работы, способы научной аргументации	
		ПК-3.2	Умеет осознанно выбирать подходящие методы решения исследовательских задач и представлять результаты научных	

			исследований в различных форматах	
		ПК-3.3	Имеет практический опыт выступлений с научными докладами и участия в научных дискуссиях	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации — экзамен**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			2-й семестр
Аудиторные занятия		28	28
в том числе:	лекции	14	14
	практические	14	14
	лабораторные		
Самостоятельная работа		80	80
В том числе курсовая работа		40	40
Форма промежуточной аттестации (экзамен – __ час.)		36	36
Итого:		144	144

**13.1. Содержание дисциплины**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
<b>1. Лекции</b>		
1.1	Выпуклые множества, конуса.	Свойства выпуклых множеств и конусов, проекция на выпуклые множества.
1.2	Понятие СДН.	Определение и свойства оператора диодной нелинейности. Задачи, приводящие с СДН.
1.3	Решения СДН.	Теорема существования и единственности решения задачи Коши с СДН. Существование периодического решения. Вопросы устойчивости решения СДН.
<b>2. Практические занятия</b>		
2.1	Выпуклые множества, конуса.	Доказательство свойств выпуклых множеств и конусов, проекция на выпуклые множества.
2.2	Понятие СДН.	Построение моделей электрических цепей с диодами в виде систем с диодными нелинейностями.
2.3	Решения СДН.	Поиск решений полученных моделей теоретическими и численными методами.

**13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий**

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Выпуклые множества, конуса.	2	2		24	28
2	Понятие СДН.	6	6		28	40
3	Решения СДН.	6	6		28	28

Итого:	14	14	80	108
--------	----	----	----	-----

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется:

- изучать основную и дополнительную литературу;
- разбирать и изучать конспекты лекций;
- заниматься поиском новых публикаций по теме дисциплины;
- выполнять контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- выполнять практические задания с применением теоретического материала.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<a href="#">Петрова, Любовь Петровна</a> . Системы с диодными нелинейностями : учебное пособие / Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020 .— 80 с.
2.	<a href="#">Обен, Жан-Пьер</a> . Прикладной нелинейный анализ = Applied nonlinear analysis / Ж.-П. Обен, И. Экланд ; пер. с англ. Б.С. Дарховского, Г.Г. Магарил-Ильяева с предисл. В.М. Тихомирова .— М. : Мир, 1988 .— 510 с.
3.	<a href="#">Филиппов, Алексей Федорович</a> . Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов .— М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985 .— 222, [2] с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	<i>Беклемешев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры /— М.: Наука, 1983. — 336 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Источник
1	<a href="http://vgupetrova.ru/">http://vgupetrova.ru/</a> — персональный сайт преподавателя Петровой Л.П.
2	<a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a> — образовательный портал ВГУ «Электронный университет»

#### 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	<a href="#">Петрова, Любовь Петровна</a> . Системы с диодными нелинейностями : учебное пособие / Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020 .— 80 с.

#### 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В части освоения материала лекционных и практических занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс «Системы с диодными нелинейностями» (URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5640>) на портале «Электронный университет ВГУ».

#### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель.

В самостоятельной работе обучающиеся используют ресурсы Зональной научной библиотеки ВГУ (электронный каталог: <http://www.lib.vsu.ru>)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Выпуклые множества, конуса.	ПК-1 ПК-3	ПК-1.2 ПК-3.1	контрольная работа №1
2.	Понятие СДН	ПК-1 ПК-3	ПК-1.2 ПК-3.1 ПК-3.2	контрольная работа № 1
3	Решение СДН	ПК-1 ПК-3	ПК-1.2 ПК-3.1 ПК-3.2 ПК-3.3	контрольная работа № 2
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью индивидуальных опросов на лекциях и практических занятиях.

#### Контрольная работа № 1

Вариант 1.

- Докажите, что пустое множество является выпуклым множеством.
- Докажите, что если  $x \in \text{int} Q$  (т.е.  $x$  есть внутренняя точка множества  $Q \subset \mathbb{R}^n$ ), то  $N_x = \{\theta\}$  – конус, состоящий из одной нулевой точки.

Вариант 2

- Докажите, что сдвиг  $Q+s$  выпуклого множества  $Q \subset \mathbb{R}^n$  на вектор  $s \in \mathbb{R}^n$  есть выпуклое множество.
- Докажите, что если  $x$  есть точка сдвинутого подпространства  $Q = \{x: (n, x) = c\}$  единичной коразмерности, то  $N_x = \text{lin}\{n\}$  (линейная оболочка одноэлементного множества  $\{n\}$ , т.е. проходящая через нуль прямая с направляющим вектором  $n$ ).

#### Контрольная работа № 1

Вариант 1. Для электрической цепи двухполупериодного выпрямителя тока построить модель в виде системы с диодной нелинейностью (СДН).

Вариант 2. Для электрической цепи умножителя (четырёхзвёздного) напряжения построить модель в виде СДН.

Примеры тем курсовых работ

1. Исследование с помощью СДН влияния на образование циклов и стационарных точек системы хищник-жертва ограничения сверху на численность хищника.
2. Исследование с помощью СДН влияния на образование циклов и стационарных точек системы хищник-жертва ограничения снизу на численность хищника.
3. Исследование с помощью СДН влияния на образование циклов и стационарных точек системы хищник-жертва ограничения сверху на численность жертвы.
4. Исследование с помощью СДН влияния на образование циклов и стационарных точек системы хищник-жертва ограничения снизу на численность жертвы.

## **20.2. Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация в форме экзамена по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

КИМ экзамена, содержащий теоретические вопросы из перечня вопросов к экзамену и практическое задание, построенное по форме прилагаемого перечня практических заданий.

### **Перечень вопросов к экзамену:**

1. Выпуклые множества, Нормальны и касательный конус, разложение вектора на ортогональные проекции.
2. Определение системы с диодными нелинейностями и её решений.
3. Основные утверждения о конусах.
4. Оператор диодной нелинейности и его свойства.
5. Модели некоторых прикладных задач в виде систем с диодными нелинейностями (СДН).
6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши с СДН.
7. Две теоремы существования предельных циклов двумерных СДН.

### **Перечень практических заданий**

1. Построить нормальный и касательный конуса к заданному множеству в заданной точке. Проверить корректность их построения по определениям этих конусов.
2. Построить математическую модель конкретной электрической цепи с линейными элементами и диодным преобразователем.
3. Описать алгоритм программы поиска приближённого решения начальной задачи для конкретной СДН.
4. Для модели «хищник-жертва с ограничениями» в виде СДН оценить влияние формы и размера ограничения на существование цикла.
5. Описать влияние увеличения центробежной составляющей модели «хищник-жертва» в виде СДН на существование цикла, и описать изменение этого влияния при различных изменениях формы ограничения.

Экзамен проводится с помощью билетов КИМ, каждый из которых включает в себя по две формулировки основных понятий курса и практическое задание.

При промежуточном контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» (критерии При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

*Для оценивания результатов контрольных и зачётных работ используются следующие показатели:*

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи;

3) успешное прохождение текущей аттестации.

Критерий оценивания контрольных и зачётных работ осуществляется в соответствии со следующей таблицей.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся в полной мере владеет теоретическим материалом данного курса, способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не в полной мере соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Недостаточно продемонстрировано владение знаниями теоретического материала в некоторых задачах или допускает незначительные ошибки в обосновании шагов решения.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Демонстрирует частичные знания теоретического материала, или не умеет применить его в решении задачи, допускает существенные ошибки в доказательствах теорем	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует трем перечисленным показателям. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки	–	Не удовлетворительно

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) Задания открытого типа: (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ x - 2y \leq 0 \end{cases} ?$

Ответ: 3.

Решение. Три не равносильные системы  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

описывают разные грани конуса.

2. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ 2x - y \leq 0, \\ x - y \leq 0 \end{cases} ?$

Ответ: 2.

Решение. Системы  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ 2x - y \leq 0, \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ 2x - y = 0, \\ x - y \leq 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ 2x - y = 0, \\ x - y \leq 0 \end{cases}$  равносильны и задают

одну и ту же грань конуса. Остальные три системы  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ 2x - y \leq 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ 2x - y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$  и

$\begin{cases} -2x + y = 0, \\ 2x - y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$  тоже равносильны между собой и определяют минимальную грань конуса,

состоящую из нулевой точки.

3. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ -x - y \leq 0, \\ 4x - y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1.

Решение. Все шесть систем, задающие грани этого конуса эквивалентны между собой и определяют единственную грань конуса, состоящую, как и сам конус, из единственной точки «ноль».

4. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1

Решение. Здесь единственная грань совпадает с конусом и является прямой  $y = 2x$ , так как все системы, определяющие грани, эквивалентны исходной, задающей конус.

5. Сколькими способами произвольный вектор  $n$ -мерного пространства раскладывается в сумму двух ортогональных векторов, один из которых принадлежит нормальному, а второй касательному конусам, построенных к непустому выпуклому множеству в некоторой его точке?

Ответ: 1

Решение. Такое разложение единственно для любой пары взаимно сопряжённых конусов, каковыми по определению являются пара нормального и касательного конусов, построенных в одной из точек не пустого выпуклого множества.

6. Сколько решений имеет задача  $\dot{x} = \tau_x f(t, x)$ ;  $x(t_0) = x_0 \in Q$  на промежутке  $[t_0, \infty)$  ?

Здесь  $\tau_x$  - оператор проектирования на касательный конус к не пустому выпуклому множеству  $Q$  в точке  $x$ , а функция  $f(t, x)$  непрерывна по  $t \in [t_0, \infty)$  и удовлетворяет условию Липшица по  $x \in Q$ .

Ответ: 1.

Решение. По одной из теорем курса решение указанной задачи существует и единственно на промежутке  $[t_0, \infty)$ .

7. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} 3x + y \leq 0, \\ -3x - y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1

Решение. Здесь единственная грань совпадает с конусом и является прямой  $y = -3x$ , так как все системы, определяющие грани, эквивалентны исходной, задающей конус.

8. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} x + 3y \leq 0, \\ -3x + y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 3.



Решение. Три не равносильные системы  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -3x+y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x+3y \leq 0, \\ -3x+y=0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -3x+y=0 \end{cases}$  описывают разные грани конуса.

9. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} x+3y \leq 0, \\ -x-3y \leq 0 \\ 3x-y \leq 0 \end{cases}$

Ответ: 2

Решение. Системы  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -x-3y \leq 0 \\ 3x-y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x+3y \leq 0, \\ -x-3y=0 \\ 3x-y \leq 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -x-3y=0 \\ 3x-y \leq 0 \end{cases}$  равносильны и задают одну и

ту же грань конуса. Остальные три системы  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -x-3y \leq 0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -x-3y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x+3y=0, \\ -x-3y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$  тоже

равносильны между собой и определяют минимальную грань конуса, состоящую из нулевой точки.

10. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} x-5y \leq 0, \\ -x+5y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1

Решение. Здесь единственная грань совпадает с конусом и является прямой  $y=0.2x$ , так как все системы, определяющие грани, эквивалентны исходной, задающей конус.

11. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} x+3y \leq 0, \\ x-y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 3.

Решение. Три не равносильные системы  $\begin{cases} x+3y=0, \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x+3y \leq 0, \\ x-y=0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x+3y=0, \\ x-y=0 \end{cases}$  описывают разные грани конуса.

12. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} -3x+2y \leq 0, \\ -x+3y \leq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1

Решение. Все шесть систем, задающие грани этого конуса эквивалентны между собой и определяют единственную грань конуса, состоящую, как и сам конус, из единственной точки «ноль».

13. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} 5x-2y \leq 0, \\ -x+y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 3.

Решение. Три не равносильные системы  $\begin{cases} 5x-2y=0, \\ -x+y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} 5x-2y \leq 0, \\ -x+y=0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 5x-2y=0, \\ -x+y=0 \end{cases}$  описывают разные грани конуса.

14. Сколько граней у конуса, заданного системой  $\begin{cases} 3x+2y \leq 0, \\ -3x-2y \leq 0 \end{cases}$  ?

Ответ: 1

Решение. Здесь единственная грань совпадает с конусом и является прямой  $y = -1.5x$ , так как все системы, определяющие грани, эквивалентны исходной, задающей конус.

15. Сколько граней у конуса, заданного системой 
$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 0, \\ -3x + 2y \leq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: 2.

Решение. Системы  $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ -3x + 2y \leq 0, \\ x - y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} 3x - 2y \leq 0, \\ -3x + 2y = 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ -3x + 2y = 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$  равносильны и задают

одну и ту же грань конуса. Остальные три системы  $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ -3x + 2y \leq 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} 3x - 2y \leq 0, \\ -3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ -3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ -3x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$  тоже равносильны между собой и определяют минимальную грань конуса,

состоящую из нулевой точки.

## 2) Задания закрытого типа (тестовые, средний уровень сложности):

1. Верно ли, что оператор проектирования на не пустое выпуклое множество удовлетворяет условию Липшица?

Ответ: верно.

Решение. Оператор проектирования на выпуклое множество по одной из теорем курса является нестягивающим, то есть удовлетворяющим условию Липшица с константой 1.

2. Верно ли, что нормальный и касательный конусы, построенные к не пустому выпуклому множеству в его точке  $x$  являются взаимно сопряжёнными?

Ответ: верно.

Решение. Касательный конус по определению является сопряжённым к нормальному замкнутому конусу, поэтому сопряжённый к сопряжённому совпадает с исходным конусом.

3. Верно ли, что нормальный конус не определён во внутренних точках выпуклого множества?

Ответ: неверно.

Решение. Во всех внутренних точках выпуклого множества нормальный конус состоит из одной нулевой точки пространства.

4. Верно ли, что нормальный конус к не пустому выпуклому множеству может совпадать со всем пространством?

Ответ: верно.

Решение. Если выпуклое множество состоит из одной единственной точки, то нормальный конус в этой точке – всё пространство.

5. Верно ли, что касательный конус пуст в точках не пустого выпуклого множества с пустой внутренностью.

Ответ: неверно.

Решение. Касательный конус, как и нормальный, построенный к не пустому выпуклому множеству, никогда не бывает пустым и всегда содержит нулевую точку.

6. Верно ли, что задача  $\dot{x} = \tau_x f(t, x); x(t_0) = x_0 \in Q$ , где  $\tau_x$  - оператор проектирования на касательный конус к не пустому выпуклому множеству  $Q$  в точке  $x$ , а функция  $f(t, x)$  непрерывна по  $t \in [t_0, \infty)$  и удовлетворяет условию Липшица по  $x \in Q$ , имеет на  $[t_0, \infty)$ , бесконечное множество решений?

Ответ: неверно.

Решение. По одной из теорем курса решение указанной задачи существует и единственно на промежутке  $[t_0, \infty)$ .

7. Верно ли, что любой вектор  $n$ -мерного пространства единственным способом раскладывается в сумму двух ортогональных векторов, один из которых принадлежит нормальному, а второй касательному конусам, построенных к непустому выпуклому множеству в некоторой его точке?

Ответ: верно.

Решение. Это верно для любой пары взаимно сопряжённых конусов, каковыми по определению являются пара нормального и касательного конусов, построенных в одной из точек не пустого выпуклого множества.

8. Верно ли, что уравнение  $\dot{x} = \tau_x f(t, x)$  эквивалентно включению  $\dot{x} \in f(t, x) - N_Q(x)$  если  $\tau_x$  - оператор проектирования на касательный конус к не пустому выпуклому множеству  $Q$  в точке  $x$ , а  $N_Q(x)$  - нормальный к  $Q$  в точке  $x$  конус?

Ответ: верно.

Решение. По одному из доказанных утверждений курса множества абсолютно непрерывных на промежутке функций, удовлетворяющих указанным уравнению и включению, совпадают.

9. Верно ли, что выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой?

Ответ: верно.

Решение. По одному из определений выпуклая оболочка – это наименьшее выпуклое множество, содержащее данное. А так как в вопросе исходное множество выпукло, то оно и является наименьшим из всех выпуклых множеств его содержащих.

10. Верно ли, что коническая оболочка множества содержится в его выпуклой оболочке?

Ответ: неверно.

Решение. Коническая оболочка множества - это множество всех возможных линейных комбинаций конечного числа его элементов с неотрицательными множителями, а для принадлежности выпуклой оболочке линейная комбинация должна соответствовать ещё одному дополнительному требованию – сумма всех множителей должна быть равна единице. Поэтому выпуклая оболочка меньше конической.

11. Верно ли, что выпуклая оболочка множества содержится в его конической оболочке?

Ответ: верно.

Решение. Коническая оболочка множества - это множество всех возможных линейных комбинаций конечного числа его элементов с неотрицательными множителями, а для принадлежности выпуклой оболочке линейная комбинация должна соответствовать ещё одному дополнительному требованию – сумма всех множителей должна быть равна единице. Поэтому выпуклая оболочка меньше конической.

12. Верно ли, что гранёный конус, определённый системой неравенств 
$$\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

является заострённым?

Ответ: верно.

Решение. Минимальная грань определяется системой  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  с единственным нулевым решением.

13. Верно ли, что у гранёного конуса, определённого системой неравенств  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$  имеется две грани?

Ответ: неверно.

Решение. У данного конуса три грани, определяемые следующими тремя не эквивалентными системами  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ .

14. Верно ли, что гранёный конус, определённый системой неравенств  $\begin{cases} -2x + y \leq 0, \\ -6x + 3y \leq 0 \end{cases}$  является заострённым?

Ответ: неверно.

Решение. Минимальная грань определяется системой  $\begin{cases} -2x + y = 0, \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$ , решениями которой являются все точки прямой  $y = 2x$ , а не единственная нулевая.

15. Верно ли, что любая грань гранёного конуса является тоже гранёным конусом?

Ответ: верно

Решение. Нужно каждое равенство в системе, определяющей грань, заменить на два неравенства, эквивалентных равенству, тогда получится система неравенств, по определению описывающая гранёный конус.